

# 边界探测的小波变换方法

杨文杰 刘浩学 马 昆

(北京印刷学院研究所图象中心, 北京 102600)

**摘 要** 根据 Mallat 的多尺度边界探测的思想, 实现了连续小波变换的多尺度边界探测, 并用快速 Fourier 变换作为工具, 进行连续小波变换的计算。在计算任意方向的模值时, 提出了使用加权平均的方法。给出了算例。

**关键词** 小波变换 多尺度边界

## 0 引 言

图象的边界反应的是图象灰度的突变, 在多尺度下得到的多尺度边界可以反应图象的不同特征, 如在较大尺度下对应大的物体的边界, 在精细尺度下对应小的物体的边界。Canny(1986)给出了一种多尺度边界检测算子, 对给出的图象  $f$ , 用 Gauss 函数  $G_\sigma$  进行滤波, 得  $f * G_\sigma(t)$ ,  $\sigma$  可取不同值, 计算其梯度的模和方向:

$$\begin{cases} M_\sigma = \|\nabla(f * G_\sigma)\| \\ A_\sigma = \nabla(f * G_\sigma) / \|\nabla(f * G_\sigma)\| \end{cases} \quad (1)$$

则边界点为在方向  $A_\sigma$  上使  $M_\sigma$  取得局部极大值的点。基于这种思想, Mallat(1992)提出了小波变换(wavelet transform: WT)模局部极大值方法分析信号的奇异性, 进而用于图象的边界检测。

## 1 Mallat 方法

取小波函数  $\psi$  为光滑函数  $\theta$  的导数, 记  $\psi_s(x, y) = \psi(x/s, y/s) / s^2$ , 定义二维小波函数:

$$\begin{cases} \psi^1(x, y) = \frac{\partial \theta(x, y)}{\partial x} \\ \psi^2(x, y) = \frac{\partial \theta(x, y)}{\partial y} \end{cases} \quad (2)$$

则相应的小波变换可写为

$$\begin{cases} W_1^1 f(x, y) = (f * \psi_1^1)(x, y) \\ W_2^2 f(x, y) = (f * \psi_2^2)(x, y) \end{cases} \quad (3)$$

有:

$$\begin{bmatrix} W_1^1 f(x, y) \\ W_2^2 f(x, y) \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} (f * \theta_s)(x, y) \\ \frac{\partial}{\partial y} (f * \theta_s)(x, y) \end{bmatrix} = s \nabla (f * \theta_s)(x, y) \quad (4)$$

定义模及方向角为

$$M_s f(x, y) = \sqrt{|W_1^1 f(x, y)|^2 + |W_2^2 f(x, y)|^2} \quad (5)$$

$$A_s f(x, y) = \text{arctag}(W_2^2 f(x, y) / W_1^1 f(x, y)) \quad (6)$$

则在  $A_s f(x, y)$  方向上, 取得模  $M_s f(x, y)$  的局部极大值的点为边界点。

## 2 小波变换模局部极大值方法的讨论

### 2.1 小波函数的选取

在计算中, 小波函数的选取直接关系到运算的结果。在尺度给定时, 小波变换相当于对图象进行带通滤波, 在一定程度上去掉了噪音, 对平滑后的图象探测边界, 可减少噪音的影响, 从这个角度上看, 应使选取的小波函数具有较好的滤波效果。另一个要求就是多尺度边界的延展性, 用小波变换模的局部极大值方法, 探测出图象在不同的尺度下的边界, 实际上应是同一边界, 具体地说, 在大的尺度下探测出的边界在小的尺度下也应存在, 反之则不一定, 就看

局部极大值在不同尺度下的传播情况。这种延展性是依赖于小波函数的。

在本文的计算中使用了 Gauss 型的小波函数,其导数形式为

$$\psi^1(x, y) = \frac{-x}{C} e^{-(x^2+y^2)/2},$$

$$\psi^2(x, y) = \frac{-y}{C} e^{-(x^2+y^2)/2}.$$

其中  $C$  为常数。

## 2.2 小波变换的实现

Mallat 方法边界检测使用的是二进小波变换,即是对图象进行倍频分解,运算速度快,但考虑到图象的细节丰富,高频成分多,若进行倍频分解,不能充分显示图象细节的变化,因此,本文使用连续小波变换,并用 Fourier 变换作为工具来实现,鉴于目前计算机的运行速度很快,且使用快速 Fourier 变换,用这种方法来实现连续小波变换是可行的。

对给出的小波函数  $\psi$ , 输入的图象  $f$  及尺度参数  $s$ , 其小波变换为

$$W_s f(x, y) = (f * \psi_s)(x, y)$$

其 Fourier 变换为

$$\hat{W}_s f(\omega_x, \omega_y) = (\hat{f} \cdot \hat{\psi}_s)(\omega_x, \omega_y)$$

其中  $\hat{W}_s f(\omega_x, \omega_y)$ ,  $\hat{f}(\omega_x, \omega_y)$ ,  $\hat{\psi}_s(\omega_x, \omega_y)$  分别为  $W_s f(x, y)$ ,  $f(x, y)$ ,  $\psi_s(x, y)$  的 Fourier 变换, 由此有 Fourier 变换方法计算信号  $f(x, y)$  的小波变换。其过程可简单地理解为3步:

- (1) 求信号  $f$  的频谱  $\hat{f}$ , 及小波函数  $\psi_s$  的频谱  $\hat{\psi}_s$ 。
- (2) 计算  $\hat{f} \cdot \hat{\psi}_s$ 。
- (3) 求其逆傅氏变换。

应用 Fourier 变换方法注意的一个问题就是采样定理, 如果信号  $f(x, y)$  有截止频率  $\omega_{xc}, \omega_{yc}$ , 即  $f$  的频谱  $\hat{f}(\omega_x, \omega_y)$  满足

$$\hat{f}(\omega_x, \omega_y) = 0, \text{ 若 } \omega_x > \omega_{xc}, \omega_y > \omega_{yc}$$

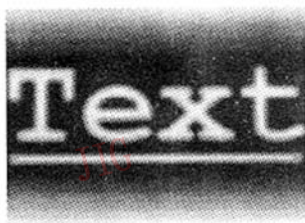


图1 输入灰度图象

则对  $x, y$  的采样间隔  $\Delta_x, \Delta_y$  应满足

$$\Delta_x \omega_{xc} \leq \pi, \Delta_y \omega_{yc} \leq \pi,$$

否则, 在离散信号的频谱上会出现假频, 影响计算结果。在具体计算频谱时, 是在区域  $0 \leq \omega_x \leq 2\pi/\Delta_x$ ,  $0 \leq \omega_y \leq 2\pi/\Delta_y$  上进行的, 但注意到频谱的周期性, 它与采样定理是一致的。

## 2.3 边界点的检测

方向  $A_s f(x, y)$  是在  $(x, y)$  点的梯度方向, 其可能的取值为  $0$  到  $2\pi$ , 但在栅格状态下, 与一个像素点紧密关联的是周围的八个像素点, 分别对应于方向

$$0, \pi/4, \pi/2, 3\pi/4, \pi, 5\pi/4, 3\pi/2, 7\pi/4$$

因此, 一种方法是仅考虑  $A_s f(x, y)$  取上述8个值时的像素  $(x, y)$  作为待检测的边界点, 而忽略  $A_s f(x, y)$  的其它值。另一种方法是把  $A_s f(x, y)$  量化成上述8个值, 如在  $\pi/4$  附近的值都取为  $\pi/4$ , 这样求  $M_s f(x, y)$  的局部极大值只是使它与8个方向中的某个方向上的2个邻域像素的值进行比较, 例如,  $A_s f(x, y) = 0$ , 则当  $M_s f(x, y)$  大于  $M_s f(x-1, y)$  和  $M_s f(x+1, y)$  时, 像素  $(x, y)$  才能作为边界点(见图2)。第3种方法, 在  $a = A_s f(x, y)$  方向上, 像素  $(x, y)$  的邻域像素的模值  $m$  是其相邻2个方向上像素模值的加权平均, 其权值是由  $a$  与这2个方向角值的差值确定, 具体地说, 根据  $a$  的值落入上述8个值的哪两个之间, 记这2个值为  $a_1, a_2$ , 与之相应的2个像素的模值记为  $m_1, m_2$ , 定义权值分别为

$$w_1 = (a_2 - a) / (a_2 - a_1)$$

$$w_2 = (a - a_1) / (a_2 - a_1)$$

则

$$m = w_1 m_1 + w_2 m_2$$

其结果见图3。实际上, 上述方法都是逐个像素地进行判别的, 在计算上较容易实现, 缺点就是使边界图象出现孤立点和不连续性, 还会检测出多余的点。

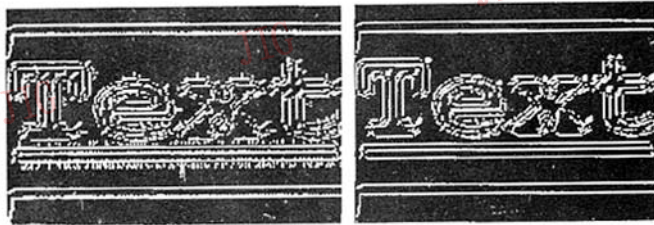


图2

图3

### 3 结论

使用 Mallat 的小波变换模局部极大值方法求取多尺度边界的思想,本文实现了连续小波变换的多尺度边界探测,可以根据图象细节的丰富程度选择小波变换的尺度,并用快速 Fourier 变换作为工具,进行连续小波变换的计算,运算速度快,计算过程清晰。在计算任意方向的模值时,使用了加权平均的方法,取得了较好的结果。

#### 参考文献

- 1 Mallat S. A theory of multiresolution signal decomposition; the wavelet representation. IEEE Trans. PAMI, 1989, 11(7): 674~



**刘浩学** 1987年毕业于中科院西安光机所光学专业,硕士,现任北京印刷学院图象中心主任、副教授,主要从事印刷色彩学,印刷图象处理等方面的教学与研究。



**杨文杰** 1995年毕业于石油大学,博士,现在北京印刷学院图象中心,主要从事图象处理及 CAD 等方面软件的开发工作。

**马昆** 助研,1992年毕业于北京印刷学院印刷技术系。现在该院图象中心从事图象处理与制作。

## Edge Detection Based on Wavelet Transform Method

Yang Wenjie, Liu Haoxue, Ma Kun

(Image center of Beijing Institute of Printing, Beijing 102600)

**Abstract** Based on the idea of detecting multiscale edge by Mallat, multiscale edge detection with continuous wavelet transform is done. During the calculation of continuous wavelet transform, Fourier transform is used. The method of weighted average is given to calculate the modulus on every direction. At last an example is given.

**Keywords** Wavelet transform, Multiscale edge

### 《工程图学学报》征稿与征订

本刊主要刊载我国工程图学领域的科研、教学和工程应用的高质量学术论文,要求反映我国图学学科的最新研究成果、最新发展水平和发展方向。主要内容:理论图学;应用图学;计算机图学及 CAD;科学可视化;工业设计;图样标准化;图学发展综述;对国内外重要论著的评述;图学教育理论以及本领域中的学术动态等。稿件篇幅6000~8000字(包括图、表、公式所占面积折合的字数)。

本刊为季刊,16开本,约100页,激光照排,每期定价10.00元(包括邮费),全年40.00元。欢迎订阅,款项可信汇至工商银行北京海淀区东升路分理处转中国工程图学学会(帐号 891376-13),或汇款至北京学院路37号,中国工程图学学会 学报编辑部,邮编:100083。